

文章编号: 1000-8055(2005)04-0534-06

双时间步长加权 ENO-强紧致高分辨率 格式及在叶轮机械非定常 流动中的应用

王保国¹, 刘淑艳¹, 张 雅², 纪秀玲¹, 靳艳梅²

(1 北京理工大学 机电工程学院, 北京 100081;

2 北京理工大学 机械与车辆工程学院, 北京 100081)

摘要: 在非结构网格下, 针对非定常三维 N-S 方程组发展了一种双时间步长高精度快速迭代格式。该格式在时间上具有二阶精度, 在空间上将 $r=3$ 的加权 ENO 格式与强紧致格式相结合去处理 N-S 方程中的对流项以及离散方程的右端项, 并用四阶精度的紧致格式去计算 N-S 方程中的粘性项。典型的 3 个算例从不同侧面对格式进行了考核。计算表明: 该算法具有高效率与高分辨率的特征, 所得的计算结果与相关实验数据比较吻合, 初步表明了该算法可以在非结构网格下模拟非定常流动的物理过程。

关键词: 航空、航天推进系统; 非结构网格; 加权 ENO 格式; 强紧致格式; 双时间步迭代格式;
N-S 数值解

中图分类号: V 211.1

文献标识码: A

Pseudo-Time Method of Weighted ENO-Strongly Compact High Resolution Schemes and Its Application to Turbomachinery Unsteady Flow

WANG Bao-guo¹, LI N Shu-yan¹, ZHANG Ya²,
JI Xiu-ling¹, JIN Yan-mei²

(1. The School of Mechatronic Engineering,

Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2 The School of Mechanical and Vehicular Engineering,
Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: The Pseudo-time Method and high accuracy rapid iterative scheme were developed for unsteady 3D N-S equations with unstructured grids. This scheme has two-order accuracy in time, and combines weighted ENO scheme ($r=3$) and strongly compact scheme to treat convection term in N-S equation and the right terms of the discrete equation. Besides, four-order accurate strongly compact scheme is used to calculate viscosity term of N-S equation. Three typical cases were used to check the scheme in different ways. Numerical test shows that the scheme not only has the character of high efficiency and high resolution, but

收稿日期: 2004-06-16; 修订日期: 2004-09-22

基金项目: 国家自然科学基金资助(50376004); 高等学校博士学科点专项基金资助(20030007028)

作者简介: 王保国(1947-), 男, 山东临清人, 北京理工大学机电工程学院教授, 博士生导师, 主要从事气动热力学研究

also can keep high-order accuracy. Further, the computed results obtained from the proposed scheme are in good agreement with experiment and show the scheme can simulate physical process of unsteady flow with unstructured grids

Key words: aerospace propulsion system; unstructured grids; weighted ENO scheme; strongly compact scheme; pseudo-time method; numerical resolution N-S equations

由静子与转子组成的涡轮级或由动叶与静叶组成的压气机级三维流场是一个非常复杂的三维非定常流场, 对于这类流场的数值模拟一直为人们所关注^[1~3]。随着叶轮机负荷的不断提高和叶排轴向间距的不断缩小, 特别是对转涡轮设计技术^[4]以及 Edge Matching 技术^[5]的发展, 因此较准确的模拟非定常流动已成为当代叶轮机械气动热力学研究领域的热点之一。本文是在文献[6]工作的基础上, 进一步改进与发展了非结构网格下

有限体积法的双时间步长迭代格式使其捕捉激波与间断时具有较高的分辨率并且在空间上格式具有高精度。

1 非结构网格下有限体积法双时间步长迭代格式的通用公式

在相对坐标系 (x, y, z) 下三维、可压缩、非定常、雷诺平均N-S 方程组的无量纲形式为^[7]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (E_I + E_V)}{\partial x} + \frac{\partial (F_I + F_V)}{\partial y} + \frac{\partial (G_I + G_V)}{\partial z} = S_w$$

(1)

将(1)式在求解域上积分并将物理量取在网格单元体的体心处, 便有:

$$\Omega_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \sum_{j=nb(i)} [(f_{i,j} \cdot n_{i,j}) S_{i,j}] = (S_w)_i \Omega_i$$

(2)

式中:

$$f \equiv (E_I + E_V)i + (F_I + F_V)j + (G_I + G_V)k$$

(3a)

$$(f \cdot n)_{i,j} \equiv f_{i,j}^I + f_{i,j}^V$$

(3b)

将(2)式在时间方向上采用 Euler 向后差分, 并整理为:

$$\Omega_i \frac{3Q_i^{n+1} - 4Q_i^n + Q_i^{n-1}}{2\Delta t} + R_i^{n+1} = 0$$

或

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{R_i^{n+1}}{\Omega_i} = 0$$

(4)

式中:

$$R_i^{n+1} \equiv - (S_w)_i^{n+1} \Omega_i + \sum_{j=nb(i)} [(f_{i,j}^I + f_{i,j}^V)^{n+1} S_{i,j}]$$

(5)

这里下标 (i, j) 表示单元 i 与单元 j 的交界面, $f_{i,j}^I$ 与 $f_{i,j}^V$ 分别表示交界面 (i, j) 处的无粘与粘性通量。引进伪时间项, 则(4)式可变为^[8, 6]:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \tau} + \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{R_i^{n+1}}{\Omega_i} = 0$$

(6)

这里 t 为物理时间, τ 代表伪时间; 显然对物理时间项采用二阶精度逼近, 而伪时间项用一阶逼近, 并且注意将 R_i^{n+1} 作局部线性化时, 则(6)式便可整理为:

$$\frac{Q_i^{(n), (k+1)} - Q_i^{(n), (k)}}{\Delta \tau} + \left\{ \frac{3Q_i^{(n), (k+1)} - 4Q_i^{(n), (k)} + Q_i^{(n), (k-1)}}{2\Delta t} + \frac{1}{\Omega_i} \sum_{j=nb(i)} [(A_{ij,i}^I + A_{ij,i}^V)^{(n), (k)} S_{i,j} \delta Q_i^{(n), (k)}] + \right. \\ \left. \frac{1}{\Omega_i} \sum_{j=nb(i)} [(A_{ij,j}^I + A_{ij,j}^V)^{(n), (k)} S_{i,j} \delta Q_j^{(n), (k)}] + \frac{R_i^{(n), (k)}}{\Omega_i} - (A_w)_i^{(n), (k)} \delta Q_i^{(n), (k)} \right\} = 0$$

(7)

式中上标 (n) 代表物理时间层, (k) 表示伪时间层; $\delta Q_i^{(n), (k)}$ 的定义为:

$$\delta Q_i^{(n), (k)} \equiv Q_i^{(n), (k+1)} - Q_i^{(n), (k)}$$

(8)

(7)式又可以写为:

$$\left\{ \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{3}{2\Delta t} \right) \Omega_i + \sum_{j=nb(i)} [S_{i,j} (A_{ij,i}^I + A_{ij,i}^V)^{(n),(k)}] - \Omega_i (A_{ii}^w)^{(n),(k)} \right\} \delta \Omega_i^{(n),(k)} = -R_i^{(n),(k)} + \frac{Q_i^{(n)} - Q_i^{(n-1)}}{2\Delta t} \Omega_i - \sum_{j=nb(i)} [(A_{ij,j}^I + A_{ij,j}^V)^{(n),(k)} S_{i,j} \delta \Omega_j^{(n),(k)}] \quad (9)$$

这就是本文推出的非结构网格下有限体积法双时间步长迭代格式的通用形式,它对于物理时间具有二阶时间精度。显然,(9)式可用 Gauss-Seidel 点迭代算法解出 $\delta \Omega_i^{(n),(k)}$ 值。

2 有限单元体界面上数值通量的计算及加权 ENO 格式

在(9)式的求解中,要遇到单元体界面上有关物理量及数值通量的计算,这些量的确定直接影响着数值格式的空间精度。本文将 $r=3$ 的加权 ENO 格式^[9]与强紧致格式^[10]或紧致格式^[11]相结合去决定单元体界面上的有关物理量及数值通量。为便于下文叙述特引进如下符号:令 g_j 代表单元体 j 的体心处的任意有关物理量, $h_{j+1/2}$ 为单元体界面处对应于 g 的数值通量。显然,对于一维情况则 $h_{j+1/2}$ 可表示为:

$$h_{j+1/2} = h_{j+1/2}^+ + h_{j+1/2}^- \quad (10)$$

$$h_{j+1/2}^+ = \sum_{k=-1}^1 [\omega_k^+ q_{j+k}^+(x_{j+1/2})] \quad (11a)$$

$$q_{j+k}^+(x_{j+1/2}) = q_{j+k}^+ + (x_{j+1/2} - x_{j+k}) q_{j+k}^{+(1)} + \frac{1}{2} (x_{j+1/2} - x_{j+k})^2 q_{j+k}^{+(2)} - \frac{1}{24} (\Delta x)^2 g_{j+k}^{+(2)} \quad (11b)$$

$$\omega_k^+ = \frac{\alpha_k^+}{\alpha_{-1}^+ + \alpha_0^+ + \alpha_1^+} \quad (11c)$$

$$\alpha_k^+ = \frac{\beta_k}{(\epsilon + \gamma_k)^2} \quad (11d)$$

$$[\beta_{-1}, \beta_0, \beta_1] = \left[\frac{3}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10} \right] \quad (11e)$$

$$\gamma_{-1} = \frac{13}{12} (\Delta x)^4 (g_{j-1}^{+(2)})^2 + [(\Delta x)^2 g_{j-1}^{+(2)} + (\Delta x) g_{j-1}^{+(1)}]^2 \quad (11f)$$

$$\gamma_0 = \frac{13}{12} (\Delta x)^4 (g_j^{+(2)})^2 + [(\Delta x) g_j^{+(1)}]^2 \quad (11g)$$

$$\gamma_1 = \frac{13}{12} (\Delta x)^4 (g_{j+1}^{+(2)})^2 + [(\Delta x)^2 g_{j+1}^{+(2)} - (\Delta x) g_{j+1}^{+(1)}]^2 \quad (11h)$$

上述式中 $\epsilon = 10^{-6}$; $k = -1, 0, 1$; $j+1/2$ 代表单元体 j 与单元体 $j+1$ 的界面; $g_{j+k}^{+(s)}$ (这里 $s =$

1, 2) 可借助于紧致格式或强紧致格式的思想去决定。类似的, $h_{j+1/2}^-$ 的值也可由 $j-1, j$ 和 $j+1$ 这 3 个单元体心处的 g^- , $g^{-(1)}$ 和 $g^{-(2)}$ 所决定, 关于它们的表达式这里不再给出。对应于单元体 j 与单元体 $j+1$ 的交界面上 $h_{j-1/2}^+$ 和 $h_{j-1/2}^-$ 值同样地也可由 $j-1, j$ 和 $j+1$ 这 3 个单元体心处的相关信息所确定。另外, 对于(9)式 $R_i^{(n),(k)}$ 中所含的粘性项可以用四阶紧致格式或强紧致格式作计算。

3 典型算例及分析

3.1 来流马赫数 $Ma = 3.0$ 的 GAMM 前台阶流动问题

为了考查本格式捕捉激波间断面和滑移面的能力, 选择了国际上考核算法时经常使用的 GAMM 前台阶流动问题, 即超声速气流流过带有台阶的二维风洞, 其边界条件为(计算区域见图 1):

$$\begin{cases} \Gamma_1: Ma = 3, P_i \text{ 与 } \rho_i \text{ 给定} \\ \Gamma_3: (\text{超声速流出时}) \text{ 不提条件} \\ \Gamma_5: u = 0 \\ \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_6: v = 0 \end{cases}$$

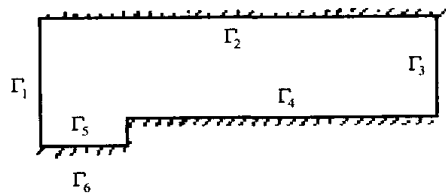


图 1 计算区域

Fig. 1 Computational domain

为了便于同国内外的数值结果(例如文献[12]中的图 10 与文献[13]中的图 10)作比较, 本文在计算时采用了 Euler 方程组。我们采用本文的格式计算了该算例, 计算中假定初始时刻时台阶前的直槽道内为均匀流场。图 2 给出了 $t = 1.0$ 至 $t = 15.0$ 时全场等密度线的分布图。由图中可以清楚的看出: 当 $t = 1.0$ 时, 可以很清楚的看出马赫数为 3.0 的超声速气流在前台阶附近形成了一道脱体的弓形激波, 这道激波与上壁面相交形成反射波; 当 $t = 2.0$ 时, 可以看出由上壁面反射

的波碰到前台阶的上表面时产生了一道反射激波, 并且这道激波在碰到上壁面时又产生了一道反射波。 $t=3.0$ 与 $t=4.0$ 时又可看到, 由上壁面反射出来的波再次碰到前台阶的上表面, 因此又产生了新的一道反射波。 由 $t=5.0, t=6.0, t=7.5, t=9.0 \text{ s}, t=11.0$ 与 $t=15.0$ 时可以清楚的看出激波的传播以及逐渐消失的过程。 由上边图 2 给出的不同时刻全场等密度分布图可以看到随

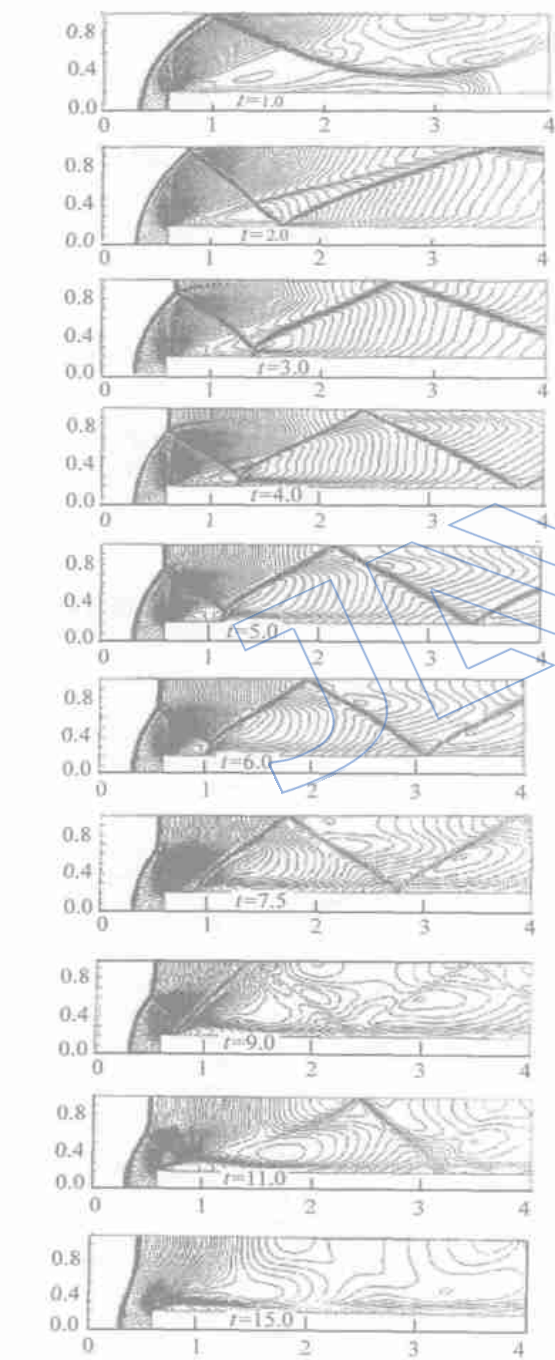


图 2 不同时刻时全场等密度分布
Fig 2 Density contours at different time

着时间的逐渐增长, 整个流场复杂激波系的变化情况, 这对了解该风洞的流场变化是十分有益的。 显然, 本文给出的流场结果要比文献[12, 13]的流场结构要细致得多, 更贴近于真实的流动情况^[14]。

3 2 攻角周期性变化的 NACA0012 翼型绕流
为了进一步考核本文的格式, 我们又计算了有实验结果的 NACA 0012 翼型绕流。 攻角周期性变化的规律是:

$$\alpha(t) = 3.16^\circ + 4.59 \sin(0.16t) \quad (12)$$

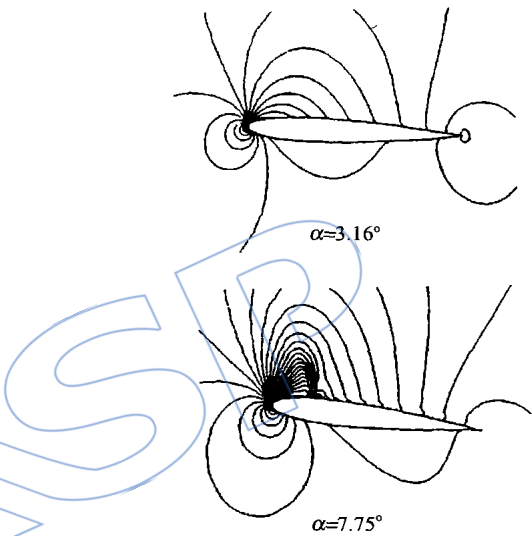


图 3 不同攻角下的全场等压线分布
Fig 3 Pressure contours for various angles of attack

来流马赫数 $M_{a\infty} = 0.6$, 雷诺数 $Re = 4.8 \times 10^6$; 计算是按平面二维问题进行的, 网格选用了三角形单元, 数值格式采用了本文提出的双时间步迭代格式(9), 得到了该问题的周期解。 图 3 给出了当 $\alpha = 3.6$ 与 $\alpha = 7.75$ 时全场等压线的分布图, 图 4 给出了当 $\alpha = 5.32$ 与 $\alpha = 6.80$ 时沿翼面压力系数的分布图。 很显然, 计算结果与实际数据^[15]大体上相吻合。 计算中采用了将一个物理流动周期分成 25 个时间步, 然后在每一个物理时间层上进行内迭代。 我们进行了 4~5 个流动周期的计算后得到了物理参数随物理时间呈规律变化的周期解。

3 3 SSM E 涡轮级第一级转子动叶的内流场计算

算例 3 是在文献[6]计算的基础上去获得 SSM E 涡轮级^[16]第一级转子动叶进口的非定常进气条件。 当然, 为了最大限度的减少工作量, 本

文在提供转子动叶进口条件的实际计算时,也采取了叶片模化的处理方法,使叶片模化后静子叶片与转子叶片数之比为 1:1;在获得转子动叶片

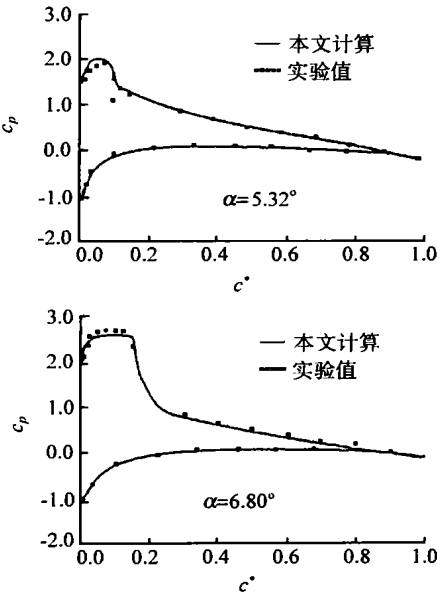


图 4 不同攻角下沿翼面压力系数的分布

Fig 4 Pressure coefficient distributions for various angles of attack

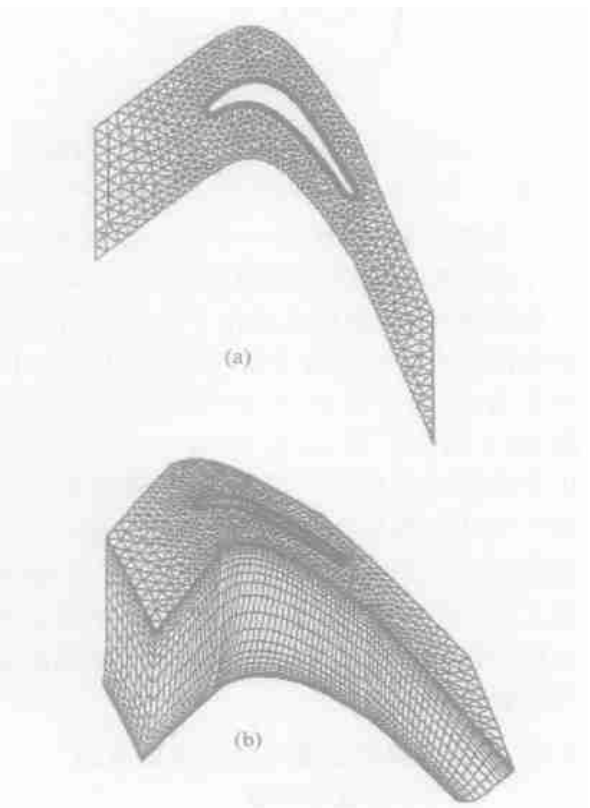


图 5 涡轮转子内流场的计算域及五面体网格

Fig 5 Computational domain and grid system

进口条件后进行转子动叶内的三维流场计算时仍采用转子动叶叶片的真实个数进行内流场的计算,并且采用了五面体非结构网格,如图 5 所示。为了便于与实验数据进行比较,这里考察叶面上任一个固定点,将该点处在一个物理周期 T 的瞬时值进行了时间平均,便得到了该点处的物理周期平均值。以压力 P 为例表达式为:

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P dt \tag{13}$$

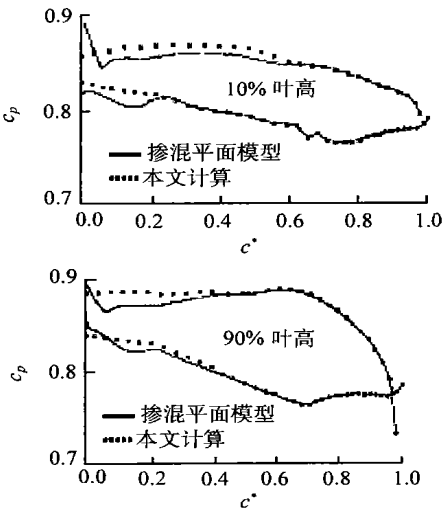


图 6 SSM E 涡轮转子叶片表面压力系数分布图

Fig 6 Surface pressure coefficient distributions along blade

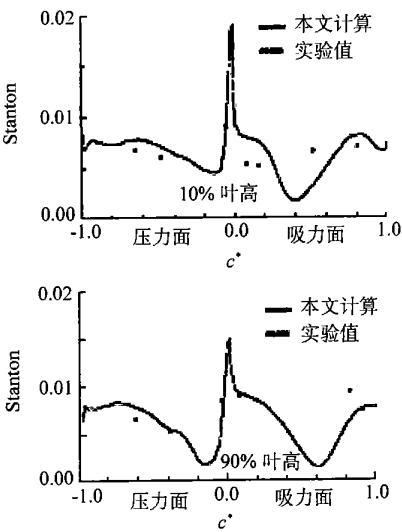


图 7 SSM E 涡轮转子叶片表面 Stanton 数分布图

Fig 7 Stanton number distributions along rotor blade

在上述周期平均的意义下,图 6 给出了 10%

叶高处与 90% 叶高处 SSM E 涡轮转子动叶叶片表面压力系数的分布以及使用掺混平面模型计算动叶进口条件时计算动叶三维流场的计算结果, 显然两者存在差异是合理的。图 7 给出了本文计算出的动叶叶片表面的 Stanton 数分布, 并与实验值作了比较。众所周知, 要算准动叶表面 Stanton 数的分布是件十分困难的事, 本文所的结果应该说是可以接受的。

4 结 论

(1) 本文在非结构网格下, 针对三维 N-S 方程组提出了一种双时间步长高精度快速迭代格式, 它所形成的离散代数方程组能够用 Gauss-Seidel 迭代算法进行快速求解。该格式在物理时间上具有二阶精度, 在空间上高于三阶。

(2) 在计算非结构网格单元体界面上物理参量及相关的数值通量时, 本文采用将 $\gamma=3$ 的加权 ENO 格式与强紧致格式相结合, 从而有效的保证了捕捉激波间断面的高分辨率, 并且还导致了 N-S 方程组空间离散的高精度。

(3) 本文完成了 3 个典型算例, 从不同侧面对本提出的格式进行了全面考核, 并将计算结果与相应的实验数据进行了比较, 计算结果基本上满意。算例 1 主要为考核该格式捕获激波与滑移面(或滑移线)的能力; 算例 2 是一个考虑粘性的非定常翼型绕流, 它有详细的测试结果。计算该算例的目的是与实验数值对比以考查该格式能否模拟非定常流动的物理过程。算例 3 是一个叶轮机械中常遇到的非定常三维流场, 计算该算例的目的是考核本格式的实际工程能力。3 个典型算例的数值结果初步表明: 该算法可以在非结构网格的框架下模拟非定常流动的物理过程; 初步显示了我们用 FORTRAN 与 C 语言编制的三维 N-S 方程程序是可行的, 是能够用于三维流场的非定常计算。

参考文献

[1] 王正明, 贾希诚. 叶型优化在非定常流条件下效果的数值分析[A]. 中国工程热物理学会热机气动热力学学术会议论文集[C]. 青岛: 2001: 235~240.

[2] 于海力, 闫朝, 季路成, 等. 探讨一种叶轮机械非定常流数值模拟的方法[A]. 中国工程热物理学会热机气动热力学学术会议论文集[C]. 广东中山: 2002: 14~18.

[3] 蒋康涛, 黄伟光, 徐燕骥. 透平叶栅静叶周向布局的数值研究[A]. 中国工程热物理学会热机气动热力学学术会议论文集[C]. 南京: 2000: 180~187.

[4] 肖翔, 赵晓路. E³ 对涡轮设计特点分析(III)——高压涡轮三元流场分析[A]. 中国工程热物理学会热机气动热力学学术会议论文集[C]. 上海: 2003: 112~115.

[5] 陈江, 季路成. 缘线匹配技术在轴流压气机设计中的应用探索[A]. 中国工程热物理学会热机气动热力学学术会议论文集[C]. 上海: 2003: 239~246.

[6] 王保国, 刘淑艳, 杨英俊, 等. 非结构网格下涡轮级三维 N-S 方程的数值解[A]. 中国工程热物理学会热机气动热力学学术会议论文集[C]. 上海: 2003: 69~81.

[7] 王保国, 黄虹宾. 叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.

[8] Jameson A. Time Dependent Calculations Using Multigrid with Applications to Unsteady Flows Past Airfoils and Wings[R]. AIAA Paper 91-1596, June 1991.

[9] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted Essentially Nonoscillatory Schemes[J]. *J Comput Phys*, 1994, 115: 200~212.

[10] 王保国, 刘淑艳, 闫为革, 等. 高精度强紧致三点格式的构造及边界条件的处理[J]. 北京理工大学学报, 2003, 23: 13~18.

WANG Bao-guo, LIU Shu-yan, YAN Wei-ge, et al. High-Order Strongly Compact Schemes and the Treatment of Boundary Conditions[J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2003, 23: 13~18.

[11] Lele S K. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like resolution[J]. *J Comput Phys*, 1992, 103: 16~42.

[12] Bey K, Oden J T. A Runge-Kutta Discontinuous Finite Element Method for High Speed Flows[R]. AIAA Paper 91-1575, June 1991.

[13] Donat R, Font J A, Marquina A. A Flux-Split Algorithm Applied to Relativistic Flows[J]. *J Comput Phys*, 1998, 146: 58~81.

[14] Emery A F. An Evaluation of Several Differencing Methods for Inviscid Fluid Problem[J]. *J Comput Phys*, 1968, 2: 306~307.

[15] Olsen J J. Compendium of Unsteady Aerodynamic Measurements[R]. Technical Report 702, A GARD, 1982.

[16] Dunn M G, Kim J. Heat Transfer and Pressure Measurements and Comparison with Prediction for the SSM E Two-Stage Turbine[R]. NASA CR 190164, 1991.